BACCALAUREAT TECHNOLOGIQUE

SCIENCES ET TECHNOLOGIES INDUSTRIELLES

GENIE DES MATÉRIAUX
GENIE MECANIQUE B, C, D, E

MATHEMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures **Coefficient : 4**

Séries STI
- **Génie mécanique options :**
  Systèmes Motorisés (B), Structures Métalliques (C),
  Bois et Matériaux Associés (D), Matériaux Souples (E),
- **Génie des Matériaux.**

Dès que le sujet vous est remis assurez vous qu'il est complet, que toutes les pages sont imprimées.

L'usage des calculatrices est autorisé pour cette épreuve.
Le candidat doit traiter les deux exercices et le problème.
Il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et de la qualité de la rédaction dans l'appréciation des copies.

Le formulaire officiel de mathématiques est distribué en même temps que le sujet.
Le sujet nécessite une feuille de papier millimétré.

Ce sujet comporte 3 pages (y compris celle-ci).

Exercice I (5 points)
Tous les résultats demandés seront justifiés.

Soit le nombre complexe $z_1 = 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$. On pose :

$z_2 = \overline{z_1}$, où $\overline{z_1}$ désigne le nombre complexe conjugué de z_1,

$z_3 = -z_1$,

$z_4 = z_1 \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1°) Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2 et z_3.

2°) Déterminer le module et un argument des nombres complexes z_2 et z_3.

3°) a) Montrer que $z_4 = 3\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$.
b) En déduire le module et un argument du nombre complexe z_4.
c) Quelle est la forme algébrique de z_4 ?

4°) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,;\vec{u}\,,\vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives z_1, z_2, z_3 et z_4.

a) Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon. Construire ce cercle.
b) Construire les points A, B, C et D en utilisant leurs ordonnées.
c) Calculer les distances AC et BD.
d) Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice II (4 points)

1°) Résoudre l'équation différentielle : $9y'' + y = 0$.

2°) Déterminer la solution f de cette équation différentielle vérifiant les conditions initiales :

$$\begin{cases} f(0) = \sqrt{3} \\ f'(0) = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

3°) a) Montrer que, pour tout nombre réel x, on peut écrire : $f(x) = 2\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$.
b) Résoudre, dans l'ensemble des nombres réels, l'équation $f(x) = -\sqrt{2}$.

4°) Calculer la valeur moyenne m de f sur l'intervalle $[0\,;\,\pi]$.

Problème (11 points)

Soit f la fonction numérique définie, pour tout nombre réel x, par : $f(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{x} - 2x$.

On note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 2 cm).

1°) Comportement de f en $-\infty$.

a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x$ est une asymptote oblique à la courbe C.

c) Étudier les positions relatives de la courbe C et de la droite Δ.

2°) Comportement de f en $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout nombre réel x différent de 0, on peut écrire :

$$f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2x} + \frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 2\right).$$

b) En déduire la limite de f en $+\infty$.

3°) Étude des variations de f.

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f et vérifier que l'on a pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = \left(\mathrm{e}^{x} + 2\right)\left(\mathrm{e}^{x} - 1\right).$$

b) Étudier le signe de $f'(x)$, lorsque x décrit l'ensemble des nombres réels.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

4°) Tracer la droite Δ et la courbe C dans le repère $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

5°) Calcul d'une aire.

Soit α un nombre réel strictement négatif.

a) Hachurer la partie H du plan limitée par la courbe C, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.

b) Calculer, en fonction de α et en unités d'aire la valeur de l'aire de la partie H, que l'on notera $A(\alpha)$.

c) Déterminer la limite de $A(\alpha)$ quand α tend vers $-\infty$. Interpréter le résultat obtenu.